

# Zur Nukleon-Nukleon-S-Streuung mit Hilfe von Einbosonaustausch-Potentialen

E. TRÜBENBACHER

Institut für Physik der Universität Mainz

(Z. Naturforsch. 25 a, 1375—1379 [1970]; eingegangen am 24. Juli 1970)

An attempt is discussed to parametrize the low-energy nucleon-nucleon S-scattering data by a non-relativistic Potential corresponding to the exchange of quantum numbers  $J^P$ , with mass and coupling constants of a fictive "meson" as parameters. Whereas  $^1S$ -scattering presents no difficulties, a final decision about the usefulness of the potentials was prevented by the instabilities of the numerical integrations in case of  $^3S$ -scattering with respect to a unitarity test built into the computer programme. As a by-product, a multipole expansion of the one boson exchange potential is given in analogy to electrostatics.

## A. Einleitung

Es ist bekannt, daß die Beschreibung der N-N-Wechselwirkung durch ein Potential von vornherein auf die Wiedergabe einer Reihe von nicht immer unwesentlichen Zügen verzichten muß. Trotzdem ist es manchmal wünschenswert, diesen Nachteil wenigstens im nichtrelativistischen Energiebereich in Kauf zu nehmen und auf diese Art der Beschreibung zurückzugreifen, so z. B., wenn es sich darum handelt, auf möglichst gangbare und übersichtliche Weise eine prinzipiell unitäre Streuamplitude zu gewinnen, auch off-shell, wie sie in der Theorie der Vielteilchensysteme gebraucht wird.

Der Versuch, die Gewinnung von N-N-Potentialen auf eine gewisse theoretische Grundlage zu stellen, hat auf die sogen. OBEP's (one boson exchange potentials) geführt<sup>1, 2</sup>.

BRYAN, DISMUKES und RAMSAY bzw. BRYAN und SCOTT<sup>1</sup> ist es gelungen, die N-N-Streudaten für  $l \geq 1$  im Energiebereich von 0 bis etwa 300 MeV mit mesonentheoretischen Potentialen zu parametrisieren, und zwar ohne deren geschwindigkeitsabhängige Anteile (abgesehen von einem linearen Spin-Bahnkopplungsbeitrag).

Geschwindigkeitsabhängige Potentiale sind äquivalent nichtlokalen Potentialen, und in der Praxis läßt sich die Integration der Schrödinger-Gleichung mit solchen Potentialen nur durchführen, wenn diese

separabel sind. Die geschwindigkeitsabhängigen Anteile der OBEP's sind zwar nicht separabel, aber doch so einfach, daß die Integration der Schrödinger-Gleichung noch ohne weiteres möglich ist. Da wir aber die Ergebnisse von BRYAN et al. unverändert übernehmen wollen, werden auch wir die Parametrisierung der S-Streudaten ohne die geschwindigkeitsabhängigen Anteile versuchen.

Die genannten Autoren schließen  $l=0$  aus ihren Betrachtungen aus, um auf die Kenntnis des Potentials im Bereich innerhalb etwa 0,6 fm verzichten zu können. In diesem Innenbereich wird, wie heute allgemein angenommen, eine starke Abstoßung wirksam, die bei praktischen Rechnungen meist in Form des sogen. hard core berücksichtigt wird<sup>3</sup>. Ein solcher hard core kann im Rahmen einer analytischen Behandlung der Kernkräfte sehr hinderlich sein<sup>4</sup> (von der Tatsache abgesehen, daß er als nicht-analytisches Potential in die Streuamplitude Züge einführt, die im Widerspruch stehen mit Folgerungen aus den Dispersionsrelationen). Auch liefern z. B. Potentiale mit hard core im Hartree-Fock-Verfahren divergente Matrixelemente.

Im folgenden wird der Versuch geschildert, die OBEP's, wie sie von BRYAN et al. für  $l \geq 1$  gewonnen wurden, auch für den Fall der S-Streuung nutzbar zu machen ohne Einführung des hard core. Der kurzreichweite Teil der Kraft soll ebenfalls berücksichtigt werden durch das analytische Poten-

Sonderdruckanforderungen an Doz. Dr. E. TRÜBENBACHER,  
Institut für Physik der Universität Mainz, D-6500 Mainz,  
Saarstraße.

<sup>1</sup> R. A. BRYAN, C. R. DISMUKES u. W. RAMSAY, Nucl. Phys. 45, 353 [1963]. — R. A. BRYAN u. B. L. SCOTT, Phys. Rev. 135, B 434 [1964].

<sup>2</sup> V. V. BABIKOV, Preprint Joint Institute for Nuclear Research, Dubna 1965.

<sup>3</sup> Eine ausführliche Diskussion dieses „repulsive core“ findet sich z. B. in dem Beitrag von R. TAMAGAKI zur International Conference on the Nucleon-Nucleon Interaction, Florida, 23.—25. März 1967, veröffentlicht in Rev. Mod. Phys. 39, 629 [1967].

<sup>4</sup> R. E. PEIERLS, Proc. Intern. Conf. on Nucl. Structure, S. 13 (University of Toronto Press, Toronto, Can. 1960).



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

tial, wie es dem Austausch eines oder mehrerer Mesonen entspricht, deren Quantenzahlen Masse, Spin, Parität und Isospin sowie Kopplungskonstanten wir uns als frei wählbare Parameter offen halten. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß damit nicht gemeint ist, der hard core ließe sich durch den Austausch von ein paar schweren Mesonen erklären; es handelt sich dabei nur um den Versuch einer möglichst einfachen Parametrisierung der Streudaten.

Dieser Versuch macht es notwendig, die OBEP's in den Ursprung  $r=0$  hinein zu verfolgen. Leider verhalten sie sich dort teilweise wie  $r^{-3}$ , was den Vorteil einer Behandlung der N-N-Streuung im Rahmen einer Schrödinger-Gleichung wieder zunichte machen würde. Man ist an dieser Stelle gezwungen, einen baryonischen Formfaktor oder cut-off einzuführen. Da über derartige Formfaktoren nichts Sichereres bekannt ist, lassen wir uns vom Gesichtspunkt einer einfachen rechnerischen Behandlung leiten. Der von uns verwendete Formfaktor führt mit geringer Abwandlung zu den cut-off-Funktionen, wie sie z. B. von GREEN, SAWADA und SHARMA<sup>5</sup> verwendet wurden.

Im folgenden soll zunächst für das in der Definition von BRYAN und SCOTT übernommene N-N-Potential eine in Analogie zur Elektrostatik gebildete „Multipolentwicklung“ angegeben werden, die die Systematik in der Radialabhängigkeit der OBEP's sinnfällig macht. Nach einer kurzen Darstellung des Problems des Formfaktors folgt die Diskussion der Anpassung der  $^1S$ -Phase an die gemessenen Werte und schließlich der bei der Anpassung der  $^3S$ -Phase auftretenden Schwierigkeiten, die eine endgültige Entscheidung über die Brauchbarkeit der Potentiale in diesem Stadium nicht zugelassen haben.

## B. Allgemeine Bemerkungen

Wir übernehmen von Bryan und Scott die Definition des Potentials  $V(\mathbf{q}; \mathbf{p}, \sigma_i)$  im Impulsraum ( $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$  mit  $\mathbf{p}$  = CMS-Impuls vor,  $\mathbf{p}'$  = CMS-Impuls nach dem Stoß der beiden Nukleonen,  $\sigma_1$  bzw.  $\sigma_2$  die Pauli-Spinmatrizen für Nukleon 1 bzw. 2), wie es dem Austausch eines Mesons der Masse  $\mu$  entspricht.

<sup>5</sup> A. E. S. GREEN, T. SAWADA u. R. D. SHARMA, Proceedings of the Conference on Isobaric Spin in Nucl. Phys. Herausgeber T. D. Fox u. D. ROBSON, Academic Press Inc., New York 1966.

<sup>6</sup> Siehe z. B. J. D. JACKSON, Classical Electrodynamics, J. Wiley, New York 1962, S. 541.

Dieses Potential läßt sich schreiben als Greensche Transformation einer Quellfunktion  $\tilde{Q}(\mathbf{q}; \mathbf{p}, \sigma_i)$

$$\tilde{V}(\mathbf{q}; \mathbf{p}, \sigma_i) = \int d^3q' \tilde{G}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \tilde{Q}(\mathbf{q}'; \mathbf{p}, \sigma_i) \quad (1)$$

mit  $\tilde{G}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \frac{1}{q^2 + \mu^2 + i\varepsilon} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$ . (2)

Im Ortsraum genügt das zu (1) gehörige Potential  $V(\mathbf{r}; \mathbf{p}, \sigma_i)$  der Gleichung

$$(\Delta - \mu^2) V(\mathbf{r}; \mathbf{p}, \sigma_i) = Q(\mathbf{r}; \mathbf{p}, \sigma_i)$$

als Verallgemeinerung der Potentialgleichung der Elektrostatik auf Felder mit Masse.

Die Analogie zur Elektrostatik läßt sich noch einen Schritt weiter verfolgen, indem man die Greensche Funktion im Ortsraum in bekannter Weise<sup>6</sup> nach Kugelfunktionen entwickelt und den Aufpunkt in den Raum außerhalb der als endlich angenommenen Quelle verlegt. Man findet

$$V(\mathbf{r}; \mathbf{p}, \sigma_i) = -\mu \sum_{l, m} q_{lm} Y_l^m(\hat{r}) h_l^{(1)}(i\mu r) \quad (3)$$

mit den „Multipolmomenten“

$$q_l^m(\mathbf{p}, \sigma_i) = \int d^3r j_l(i\mu r) Y_l^m(\hat{r}) Q(\mathbf{r}; \mathbf{p}, \sigma_i)$$

( $j_l$ ,  $h_l^{(1)}$  sphärische Bessel- bzw. Hankel-Funktionen.)

Die Funktionen  $h_l^{(1)}$  stehen in (3) an Stelle von  $r^{-l-1}$  in der Multipolentwicklung der Elektrostatik.

Für  $l=0$  ergibt sich das Yukawa-Potential, für das LS- und das Tensorpotential [entsprechend bestimmten Anteilen in  $Q(\mathbf{r}; \mathbf{p}, \sigma_i)$ ] ergibt sich die Radialabhängigkeit

$$\text{prop. } \frac{1}{r} h_1^{(1)}(i\mu r) \quad \text{bzw. } h_2^{(1)}(i\mu r)$$

in Übereinstimmung mit dem bekannten Verhalten

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} \text{ bzw. } \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{\mu r} + \frac{1}{\mu^2 r^2} \right) \frac{e^{-\mu r}}{r}.$$

An dieser Stelle ist man zur Einführung eines out-off gezwungen: schon im Fall eines  $r^{-1}$ -Verhaltens des Potentials für  $r \rightarrow 0$  ändert sich das Verhalten der Wellenfunktionen für gekoppelte Kanäle einschneidend gegenüber dem bekannten einfachen Verhalten bei ungekoppelten Kanälen<sup>7</sup>. Untersuchungen über Streuung an singulären Potentialen sind uns nur für den Fall von Zentralpotentialen bekannt<sup>8</sup>.

<sup>7</sup> H. CORNILLE, Nuovo Cim. **23**, 526 [1962].

<sup>8</sup> N. LIMIĆ, Nuovo Cim. **26**, 581 [1962]; **42 A**, 516 [1966]. — F. CALOGERO u. M. B. DE STEFANO, Phys. Rev. **146**, 1195 [1966]. — H. CORNILLE, Nuovo Cim. **43 A**, 786 [1966]. — R. A. HANDELSMAN, Nuovo Cim. **5**, 453 [1968].

Die Kenntnis des analytischen Verhaltens der Wellenfunktionen für  $r \rightarrow 0$  war für uns unentbehrlich, da die Umgebung von  $r = 0$  wegen des unbeschränkten Anwachsens des Potentials einer Behandlung auf der Rechenanlage nicht zugänglich ist.

Obwohl aus Forderungen allgemeinerer Natur ein  $r^{-3}$ -Verhalten nicht ausgeschlossen werden kann<sup>9</sup>, dürfen wir das  $r^{-3}$ -Verhalten der OBEP's nicht als Beweis werten, daß in der Natur solch ein Verhalten vorliegt: das OBEP reproduziert die exakte Amplitude nur unter Verzicht auf eine ganze Reihe von Beiträgen und wir fühlen uns berechtigt, das  $r^{-3}$ -Verhalten durch geeignete Modifikationen des Potentialansatzes zu vermeiden.

Wir tun dies durch Einführung eines „baryonischen Formfaktors“ in die Definition des Potentials, und zwar wählen wir für sein Quadrat

$$f^2(q^2) = (1 + q^2/\mu^2)^{-1}$$

mit einem freien Parameter  $\mu$ . Ähnliche Modifikationen finden sich bei GREEN, SAWADA und SHARMA<sup>5</sup>, Gauß-förmige cut-off-Funktionen kommen vor bei OTSUKI et al.<sup>10</sup> und, in anderem Zusammenhang, bei CHEW<sup>11</sup>. (Ein Gauß-förmiger core ist nicht als Überlagerung aus Yukawa-Potentialen darstellbar.)

### C. Diskussion

Für einen ersten Überblick über die Möglichkeiten einer Anpassung sollte es genügen, wenn die gerechneten Werte innerhalb der experimentellen Unsicherheiten für die S-Streuphasen zu liegen kommen.

a) *Der Formfaktorparameter  $\mu$  soll so groß gewählt werden, daß an den Ergebnissen von Bryan und Scott keine wesentliche Änderung auftritt.* Für  $\mu \approx 3$  Nukleonenmassen ergab sich über den Energiebereich von 50 bis 300 MeV hinweg eine maximale Abweichung von 1 Grad der  $^1\delta_p$ -Phase (und dies im Bereich der hohen Energiewerte, also 300 MeV, wie zu erwarten).  $\mu = 16 \text{ fm}^{-1}$  erschien daher ausreichend. Der Verlauf des so modifizierten  $^1S$ -Potentials ist in Abb. 1 skizziert.

b)  *$^1S$ -Streuung.* Zuerst sollte durch Hinzunahme eines einzigen Mesons die  $^1S$ -Phase in ihrer Energieabhängigkeit reproduziert werden, wobei zum einen

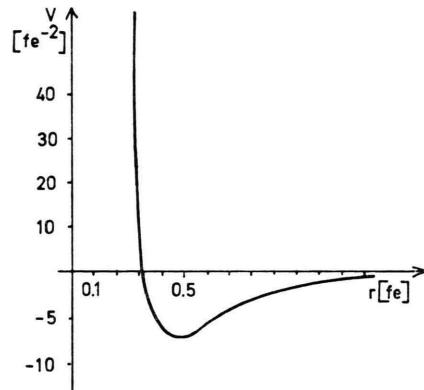


Abb. 1. Verlauf des  $^1S$ -Potentials von BRYAN und SCOTT, modifiziert mit Formfaktor. Aufgetragen ist  $v = M V$ ,  $M = \text{Nukleonmasse}$ .

das Potential seinen abstoßenden Kern nicht einbüßen, zum andern keinen  $^1S$ -Bindungszustand erlauben soll.

Hierfür erwiesen sich nur zwei „Mesonen“, d. h. Sätze von Quantenzahlen  $J^P$  geeignet:

a) das  $1^-$ -Meson, mit zwei Kopplungskonstanten und der Masse als Parameter. Diese drei Parameter sind gegeneinander ausspielbar, wie in einer „Isophasenkurve“, Abb. 2, veranschaulicht: längs dieser Kurve bleibt  $^1\delta_s(E)$  ungeändert, nämlich 36, 16, – 2 Grad bei den Energien resp. 50, 150, 300 MeV. Das zugehörige  $^1S$ -Potential ist in Abb. 3 skizziert;

β) das  $1^+$ -Meson, ebenfalls mit drei freien Parametern. Die Variationsmöglichkeiten sind wiederum in Form einer Isophasenkurve skizziert, Abb. 4. In Abb. 5 ist der Verlauf des zugehörigen  $^1S$ -Potentials dargestellt.

Beidemal ist die Mesonmasse = 2 Nukleonmassen gewählt, wodurch die Ergebnisse von Bryan und Scott nicht beeinflußt werden. Abschließend sei erwähnt, daß die Verwendung von zwei „schweren Mesonen“ für die Anpassung von  $^1\delta_s(E)$  keinerlei Vorteil bietet, die Anpassung wird nicht im geringsten besser: die Tendenz zu einem etwas zu flachen Verlauf bleibt bestehen.

c)  *$^3S$ -Streuung.* In der Schreibweise  $S_{ll'}^{JS}$ , für das Matrixelement mit Gesamtdrehimpuls  $J$ , Gesamtspin  $S$ , Bahndrehimpuls  $l$  der einlaufenden, Bahndrehimpuls  $l'$  der auslaufenden Welle, handelt es sich um die Bestimmung von  $S_{00}^{11}$  und  $S_{01}^{11}$ .

<sup>9</sup> J. M. CHARAP u. S. P. FUBINI, Nuovo Cim. **14**, 540 [1959]; **15**, 73 [1960]. — L. A. P. BALÁZS, Phys. Rev. **137**, B 1510 [1964]. — R. CIRELLI u. G. M. PROSPERI, Nuovo Cim. **37**, 1049 [1965]. — R. CIRELLI, E. MONTALDI u. G. M. PROSPERI, Preprint, IFUM-029/FT (Februar 1966).

<sup>10</sup> SH. OTSUKI, R. TAMAGAKI u. M. WADA, Progr. Theor. Phys. **32**, 220 [1964].

<sup>11</sup> G. F. CHEW, Progr. Theor. Phys. Suppl., Extra Number 1965.

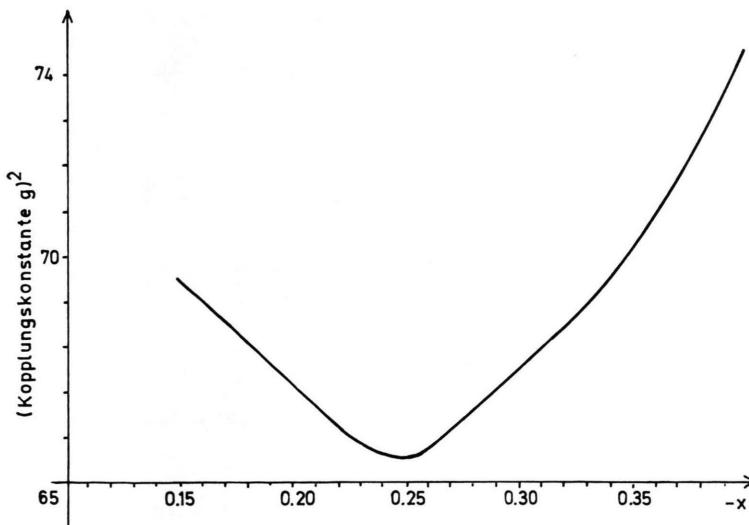


Abb. 2. „Eine Isophasenkurve“ des  $1^-$ -Mesons.  $x=g/f$ , mit  $f$  gleich der „magnetischen“ Kopplungskonstanten des  $1^-$ -Mesons. Mesonenmasse längs der Kurve konstant.

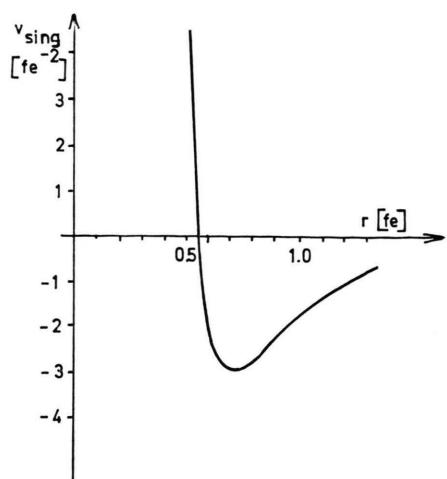


Abb. 3. Verlauf des  $1^S$ -Potentials mit  $1^-$ -„Meson“. Aufgetragen ist  $v=M V$ ,  $M$ =Nukleonenmasse.

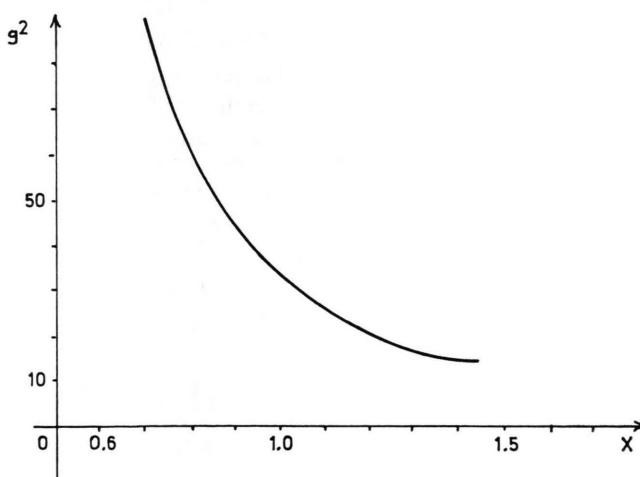


Abb. 4. „Eine Isophasenkurve“ des  $1^+$ -Mesons.  $x$ =Verhältnis der beiden Kopplungskonstanten des  $1^+$ -Mesons. Mesonmasse konstant.

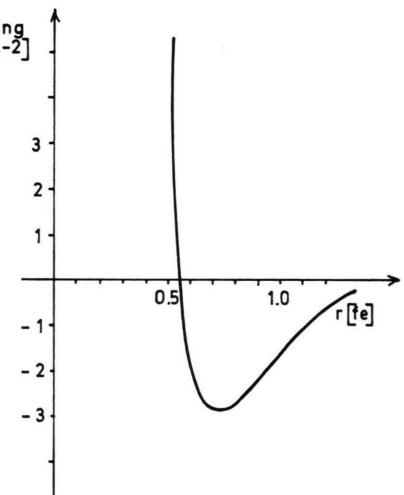


Abb. 5. Verlauf des  $1^S$ -Potentials mit  $1^+$ -„Meson“. Aufgetragen ist  $v=M V$ ,  $M$ =Nukleonenmasse.

a) Man kann entweder versuchen, aus den üblichen Anschlußbedingungen der Wellenfunktionen in Innen- und Außenraum diese beiden Matrixelemente direkt zu gewinnen. Dann ist aber darauf zu achten, daß die Fehler bei der numerischen Integration nicht so groß werden, daß die Unitaritätsforderung

|S\_{00}^{11}|^2 + |S\_{01}^{11}|^2 = 1

verletzt wird. Drückt man die  $S$ -Matrixelemente durch die Wellenfunktionen aus, so ergibt sich, daß

in jedem Augenblick der Integration die Bedingung

$$\frac{u_1 u_2' - u_2 u_1'}{w_1 w_2' - w_2 w_1'} = -1 \quad (4)$$

erfüllt sein muß für zwei linear unabhängige Lösungsvektoren  $\begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} u_2 \\ w_2 \end{pmatrix}$  des Systems von gekoppelten radialen Wellengleichungen, die am Ursprung verschwinden.

β) Man kann die gesuchten  $S$ -Matrixelemente auch parametrisieren durch die Eigenphasen und den Mischungsparameter.

Zu ihrer Bestimmung hat man *zwei* vollständige Systeme von Gleichungen zur Verfügung, und als Voraussetzung für die Konsistenz dieser beiden Systeme findet man wieder die Bedingung (4). Die Darstellung der *S*-Matrix durch Eigenphasen ist trivialerweise stets unitär. Da die üblichen Programmiersprachen (Algol, Fortran) Winkelgrößen gewöhnlich über  $\arctan$  bestimmen, bekommt man aus dem Computer praktisch immer eine unitäre *S*-Matrix. Erst die Probe auf die Bedingung (4) zeigt, ob diese unitäre *S*-Matrix wirklich brauchbar oder nur ein Scheinerfolg ist.

Bei dem Versuch, die  $^3S$ -Phasen an die Meßwerte anzupassen, prüften wir im Verlauf der numerischen Integration in regelmäßigen Abständen auf die Erfüllung der Unitaritätsbedingung (4) und stellten dabei folgendes fest:

1. Es scheint sehr empfindlich von den speziellen Anziehungs- und Abstoßungsverhältnissen abzuhängen, ob eine gegenüber diesem Test stabile, d. h. eine unitäre Integration des gekoppelten Systems von radialen Wellengleichungen möglich ist.

2. In den meisten Fällen war eine Integration in der Tat nicht möglich. Vielmehr wurde die Integration gewöhnlich nach etwa 100 bis 150 Integrationsstufen, also noch weit vor dem Ziel, instabil.

3. Die Verwendung verschiedener numerischer Verfahren, wie sie bekannt sind unter den Namen Runge-Kutta und Merson, und von Varianten dieser Verfahren konnte diese Instabilität ebensowenig be-

heben wie die Wahl verschiedener Integrationsrichtungen (von innen nach außen und umgekehrt).

Obwohl also die Anpassung der  $^1S$ -Phase nicht die geringste Schwierigkeit bereitet und noch eine ganze Mannigfaltigkeit von Potentialen zur Auswahl zuläßt, konnte eine Entscheidung über die Möglichkeit, eines davon auch an die  $^3S$ -Streudaten anzupassen, bis jetzt nicht gefällt werden. Wir möchten ferner aus diesen Erfahrungen schließen, daß numerische Ergebnisse von  $^3S$ -Streudaten mit Tensorpotential und ohne hard core, die ohne die beschriebene Sicherung der Unitarität bzw. der Konsistenz der Gleichungssysteme zur Bestimmung der Eigenphasen und des Mischungsparameters gewonnen sind, eventuell mit Vorbehalt aufgenommen werden müssen.

Ein Wort des Dankes bin ich schuldig Herrn Prof. Dr. P. BECKMANN für die Anregung des Arbeitsgebiets und sein stetiges Interesse in Verbindung mit wertvollen Ratschlägen, sowie Herrn Prof. Dr. W. BÖRSCH-SUPAN und seinen Mitarbeitern am Institut für Angewandte Mathematik in Mainz und Herrn Prof. Dr. W. KNÖDEL und seinen Mitarbeitern, darunter ganz besonders Herrn Dipl.-Math. K. FISCHER, am Rechenzentrum der Technischen Hochschule Stuttgart, für Hilfe beim Programmieren, zahlreiche Diskussionen der numerischen Probleme und großzügige Einräumung von Rechenzeiten auf der Siemens 2002 in Mainz bzw. Telefunken TR 4 in Stuttgart, ebenso Herrn Dr. D. DRECHSEL am Institut für Theoretische Physik in Frankfurt, für sehr wertvolle Diskussionen über eine numerische Methode zur Bestimmung von  $^3S$ -Streuphasen.